УДК 517.977

В. И. Максимов

О РЕКОНСТРУКЦИИ СТРУКТУРЫ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ*

1. Введение

Рассматривается линейная система, описываемая векторным уравнением с запаздыванием

$$\begin{gathered}\dot{x}(s) = Ax(s) + Bx(s-\tau), \quad s \in [0,T], \\ x(\nu) = x_0(\nu), \quad \nu \in [-\tau, 0],\end{gathered} \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^q$ – фазовый вектор системы; $\tau = \mathrm{const} \in (0, +\infty)$ – постоянное запаздывание; A и B – $q \times q$-мерные матрицы. Начальное состояние системы $x_0(\nu)$, $\nu \in [-\tau, 0]$ – непрерывная функция: $x_0(\nu) \in C(-\tau, 0; \mathbb{R}^q)$. Предполагается, что матрицы A и B неизвестны, известно лишь, что они принадлежат выпуклым, ограниченным и замкнутым множествам $\mathcal{F}_1 \subset \mathbb{R}^{q\times q}_M$ и $\mathcal{F}_2 \subset \mathbb{R}^{q\times q}_M$. Здесь и ниже символ $\mathbb{R}^{q\times q}_M$ означает пространство матриц размерности $q \times q$ с евклидовой нормой $\|\cdot\|_{q\times q}$, а символ $\mathbb{R}^q$ – пространство q-мерных векторов. Таким образом, символ $\mathbb{R}^{q\times q}$ означает пространство $q \times q$-мерных векторов.

Априорная информация о системе (1) – фиксированные множества $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$, начальное состояние $x_0(s)$ и запаздывание τ. Цель работы состоит в построении алгоритма восстановления (реконструкции) неизвестных матриц A и B с некоторой точностью μ по измерению (с ошибкой) фазовой траектории системы (1). Заметим, что одна и та же траектория может порождаться неединственной парой матриц (A, B) из множества $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$. В таком случае мы будем восстанавливать, вообще говоря, не истинные матрицы A и B, а некоторую другую пару (A_*, B_*), $A_* \in \mathcal{F}_1$, $B_* \in \mathcal{F}_2$, а именно такую пару матриц (A_*, B_*), что решение уравнения

$$\begin{gathered}\dot{y}(s) = A_*y(s) + B_*y(s-\tau), \quad s \in [0,T], \\ y(\nu) = x_0(\nu), \quad \nu \in [-\tau, 0],\end{gathered} \tag{2}$$

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №03-01-00474), а также Программы поддержки ведущих научных школ России (грант №00-15-96086).

совпадает с $x(s)$, $s \in [0,T]$. Правило выбора пары (A_*, B_*) будет уточнено ниже. Итак, мы хотим построить алгоритм вычисления матриц A_1 и B_1 со свойствами

$$\|A_* - A_1\|_{q\times q} \le \mu, \quad \|B_* - B_1\|_{q\times q} \le \mu.$$

Входными данными алгоритма являются результаты измерения (с ошибкой) в достаточно частые моменты времени $\tau_i \in [0,T]$, $\tau_{i+1} = \tau_i + \gamma$, $\tau_0 = 0$, $\gamma = \text{const} > 0$, фазового состояния системы $x(s)$, $0 \le s \le T$. Этими результатами являются векторы $\xi_i^h \in \mathbb{R}^q$, удовлетворяющие неравенствам

$$\|\xi_i^h - x(\tau_i)\| \le h.$$

Здесь символ $h \in (0,1)$ означает величину погрешности измерения.

В [1] для системы, описываемой обыкновенным векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + f_1(t, x(t))u(t),$$

был указан алгоритм динамической реконструкции n-мерной вектор-функции $u(\cdot)$ (управления) в предположении, что известно выпуклое ограниченное и замкнутое множество $P \subset \mathbb{R}^n$, которому принадлежит $u(t)$, т. е. известно множество P такое, что

$$u(s) \in P \quad \text{при почти всех} \quad s \in [0,T]. \tag{3}$$

Алгоритм основан на сочетании методов теории гарантированного управления [2] и известного в теории некорректных задач метода сглаживающего функционала (метод Тихонова) [3, 4]. Затем в случае, когда множество допустимых возмущений имеет вид

$$P(\cdot) = \{u(\cdot) \in L_2(0,T;\mathbb{R}^n) : u(s) \in P \quad \text{при почти всех} \quad s \in [0,T]\}, \tag{4}$$

задачи динамической реконструкции входа были исследованы и для других классов систем, в частности, для систем, описываемых (а) обыкновенным дифференциальным уравнением, (б) уравнениями с запаздыванием, (в) параболическими и гиперболическими уравнениями, а также вариационными неравенствами с распределенными и граничными управлениями (более детально см. обзорные работы [5–7]).

Метод цитированных работ может быть использован и в случае, когда восстановлению подлежат неизвестные параметры. В настоящей работе мы укажем алгоритм реконструкции матриц A и B, основанный на идеях [8–10].

2. Вспомогательные утверждения

Введем семейство линейных непрерывных операторов $S(x_T(\cdot))$, зависящих от функций $x_T(\cdot) \in C(0,T;\mathbb{R}^q)$ и действующих из пространства $\mathbb{R}^{2q\times q}$ в пространство $L_2(0,T;\mathbb{R}^q)$. Именно, положим для любого $u \in \mathbb{R}^{2q\times q}$

$$(S(x_T(\cdot)))(s)u = Z(x(s), x(s-\tau))u \quad \text{при почти всех} \quad s \in [0,T].$$

Здесь символ $x_T(\cdot)$ означает функцию $x(s)$, $s \in [0,T]$, а $Z(x(s), x(s-\tau))$ – матрица размерности $2q^2 \times q$ следующей структуры:

$$Z(x(s), x(s-\tau)) =$$

$$= \begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} x'(s) & 0 & \dots & 0 & x'(s-\tau) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x'(s) & \dots & 0 & 0 & x'(s-\tau) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x'(s) & 0 & 0 & \dots & x'(s-\tau) \end{pmatrix}}^{2q^2 \text{ столбцов}} \end{array} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} a\\a\\a\\a \end{pmatrix}}\right\} q \text{ строк},$$

штрих означает транспонирование (т. е. символ $x'(s)$ означает вектор-строку, отвечающую вектору-столбцу $x(s)$). Зададим взаимно-однозначное отображение $Q : \mathbb{R}_M^{q\times q} \times \mathbb{R}_M^{q\times q} \to \mathbb{R}^{2q\times q}$, которое каждой паре матриц

$$F = (A, B), \tag{5}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \dots & a_{qq} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{q1} & b_{q2} & \dots & b_{qq} \end{pmatrix}$$

ставит в соответствие вектор-столбец

$$u_F = QF = (a_{11}, \dots, a_{1q}, \dots, a_{q1}, \dots, a_{qq}, b_{11}, \dots, b_{1q}, \dots, b_{q1}, \dots, b_{qq})'.$$

В таком случае отображение Q^{-1} ставит в соответствие вектору

$$u = (a_{11}, \dots, a_{1q}, \dots, a_{q1}, \dots, a_{qq}, b_{11}, \dots, b_{1q}, \dots, b_{q1}, \dots, b_{qq})' \in \mathbb{R}^{2q\times q}$$

пару матриц $F = F_u$ вида (5).

Уравнение (1) можно записать в виде

$$\dot{x}(s) = S(x_T(\cdot))(s)u_F, \quad s \in [0,T],$$

т. е.

$$\dot{x}(s) = S(x_T(\cdot))(s)QF, \quad s \in [0,T].$$

Последнее, в свою очередь, может быть переписано в виде функционального уравнения в пространстве $L_2(0,T;\mathbb{R}^q)$

$$b(\cdot) = S_*(x_T(\cdot))(\cdot)u_F,$$

где

$$b(s) = x(s) - x_0 \ \text{ при почти всех } \ s \in [0,T],$$

семейство линейных непрерывных операторов $S_*(x_T(\cdot)) : \mathbb{R}^{2q\times q} \to L_2(0,T;\mathbb{R}^q)$ задается соотношением

$$S_*(x_T(\cdot))(s)w = (\int_0^s S(x_T(\cdot))(g)\,dg)w \ \text{ при почти всех } \ s \in [0,T], \ (w \in \mathbb{R}^{2q\times q}).$$

Пусть $\mathcal{F}_* = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$,

$$U_1 = \{u \in Q\mathcal{F}_* : b(s) = S_*(x_T(\cdot))(s)u \ \text{ при почти всех } \ s \in [0,T]\}.$$

Легко видеть, что это множество выпукло, ограниченно и замкнуто. Поэтому множество

$$U^* = \arg\min\{\|u\| : u \in U_1\}$$

одноэлементно: $U^* = \{u_0\}$.

Пусть

$$R_j = \sup\{\|F\|_{q\times q} : F \in \mathcal{F}_j\}, \quad j = 1,2,$$
$$R_3 = \sup\{\|Q(A,B)\| : A \in \mathcal{F}_1, B \in \mathcal{F}_2\},$$
$$R = \max\{R_1 + R_2, R_3\},$$
$$\xi^h(s) = \xi_i^h \ \text{ при } \ s \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i \in [0:n], \tag{6}$$
$$\xi^h(s) = x_0(\tau_i) \ \text{ при } \ s \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i \in [-r_n : -1], \quad \tau_i = \frac{iT}{n}, \quad r_n = [\tau/n].$$

Символом $[a]$ обозначена целая часть числа a. Тогда верно соотношение

$$(S_*(\xi_T^h(\cdot)))(s) = \sum_{i=0}^{i(s)-1} \gamma Z(\xi_i^h, \xi_{i-r_n}^h) + (s - \tau_{i(s)})Z(\xi_{i(s)}^h, \xi_{i(s)-r_n}^h), \quad t \in [0,T],$$

где

$$\gamma = \gamma_n = T/n, \quad i(s) = [sn/T], \quad \tau_{i(s)} = i(s)T/n.$$

Введем функцию

$$b_{h,n}(s) = \xi_i^h - \xi_0^h \ \text{ при почти всех } \ s \in [\tau_i, \tau_{i+1}).$$

Заметим, что функция $b_{h,n}(\cdot)$ действительно зависит от h, так как $\xi_i = \xi_i^h$.

Лемма 1. *Справедливо неравенство*

$$\|b(\cdot) - b_{h,n}(\cdot)\|_{L_2} \le d_1(h, 1/n) = \sqrt{T}(2h + RCT/n),$$

где

$$C_1 = (\|x_0\| + R\int_{-\tau}^{0} \|x_0(\nu)\|\, d\nu)(1 + RT\exp(RT)),$$
$$C = \max\{C_1, \max_{\nu\in[-\tau,0]} \|x_0(\nu)\|\}.$$

Доказательство. Верна оценка

$$\|x(s)\| \le \|x_0\| + \int_0^s \|Ax(y) + Bx(y-\tau)\|\, dy, \quad s \in [0, T].$$

Учитывая неравенства $\|A\|_{q\times q} \le R_1$, $\|B\|_{q\times q} \le R_2$, получаем

$$\|x(s)\| \le \|x_0\| + R\int_{-\tau}^{0} \|x_0(\nu)\|\, d\nu + R\int_0^s \|x(y)\|\, dy, \quad s \in [0, T].$$

В силу леммы Гронуолла из последнего соотношения выводим

$$\|x(s)\| \le C_1, \quad \|\dot{x}(s)\| \le RC, \quad s \in [0, T]. \tag{7}$$

Заметим, что при $s \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ справедливо неравенство

$$\|x(s) - \xi_i^h\| \le h + \int_{\tau_i}^{s} \|\dot{x}(\nu)\|\, d\nu \le h + RCT/n. \tag{8}$$

Поэтому в силу (7), (8) имеем

$$\|b(\cdot) - b_{h,n}(\cdot)\|_{L_2}^2 = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \|x(\nu) - x_0 - \xi_i^h + \xi_0^h\|^2\, d\nu \le$$
$$\le \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (2h + RCT/n)^2\, d\nu \frac{n-1}{n} T(2h + RCT/n)^2 \le T(2h + RCT/n)^2.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Справедливо неравенство*

$$\|S_*(x_T(\cdot)) - S_*(\xi_T^h(\cdot))\|_{\mathcal{L}_2} \le d_2(h, 1/n) = 2T\sqrt{\frac{qT}{3}}(h + RCT/n).$$

Здесь $\xi_T^h(\cdot)$ *означает функцию* $\xi^h(t)$, $t \in [0, T]$, *определяемую согласно* (6).

Доказательство. В силу (8) имеем

$$\|\{(S(x_T(\cdot)) - S(\xi_T^h(\cdot))\}(s)u_F\| \le \sqrt{2}q(h + RCT/n)\|u_F\|, \quad s \in [0,T].$$

Поэтому

$$\|S_*(x_T(\cdot)) - S_*(\xi_T^h(\cdot))\|_{\mathcal{L}_2} =$$
$$= \Big(\sup_{\|u_F\|\le 1}\int_0^T \Big\|\int_0^t (S(x_T(\cdot)) - S(\xi_T^h(\cdot)))(s)\,ds u_F\Big\|^2 dt\Big)^{1/2} \le$$
$$\le \Big(\int_0^T \Big(\int_0^t \sqrt{2q}(h{+}RCT/n)\,ds\Big)^2 dt\Big)^{1/2} \le \sqrt{2q}(h{+}RCT/n)\Big(\int_0^T t^2\,dt\Big)^{1/2} \le$$
$$\le 2T\sqrt{\frac{qT}{3}}(h + RCT/n).$$

Лемма доказана.

3. Алгоритм решения

Для решения задачи в качестве матриц A_* и B_*, подлежащих восстановлению, возьмем пару матриц вида $Q^{-1}u_0$, т. е. будем вычислять

$$(A_*, B_*) = Q^{-1}u_0.$$

Введем динамическую управляемую систему

$$\dot z(t) = v(t), \quad z(0) = 0 \tag{9}$$

на искусственном промежутке времени $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. Состояние системы $z(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, и управление $v(t)$ являются элементами векторного евклидова пространства $\mathbb{R}^{2q\times q}$. Наша цель – построить управляющую функцию $v(\cdot)$ такую, что для отвечающей ей траектории $z(\cdot)$ системы (9) отношение $z(t)/t$ близко к u_0 при достаточно больших t. Управления $v(t)$ в системе (9) будут формироваться по закону управления с обратной связью. Закон управления с обратной связью отождествляется с функцией

$$U : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{2q\times q} \to Q\mathcal{F}_*.$$

Для каждого $\delta > 0$ определим δ-траекторию $z_\delta(\cdot)$, порожденную законом $U(t, z)$:

$$z_\delta(0) = 0, \quad z_\delta(t) = z_\delta(t_j) + v_j^\delta \delta,$$
$$t \in [t_j, t_{j+1}), \quad t_j = j\delta, \quad v_j^\delta \in U(t_j, z_\delta(t_j)).$$

Введем функционал

$$\Lambda_\alpha(t|z_\delta(t)) = \|S_*(x_T(\cdot))(\cdot)z_\delta(t) - tb(\cdot)\|^2_{L_2} + \alpha\int_0^t \|\dot z_\delta(\nu)\|^2\,d\nu - \alpha t J^0, \qquad (10)$$

где α – вспомогательный параметр регуляризации, играющий (вместе с $\int_0^t \|\dot z_\delta(\nu)\|^2\,d\nu$) роль известного в теории некорректных задач сглаживающего функционала [3, 4],

$$J^0 = \|u_0\|^2.$$

В дальнейшем символ $\|\cdot\|_{L_2}$ означает норму в пространстве $L_2(0,T;\mathbb{R}^q)$, символ $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_2}$ – норму в пространстве линейных ограниченных операторов, действующих из $\mathbb{R}^{2q\times q}$ в $L_2(0,T;\mathbb{R}^q)$, а символ $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L_2}$ – скалярное произведение в пространстве $L_2(0,T;\mathbb{R}^q)$. Функционал Λ_α – аналог функционала Ляпунова. Мы укажем такое правило выбора управления по принципу обратной связи $U(t,z)$, что справедливы неравенства

$$\Lambda_\alpha(t|z_\delta(t)) \le \Lambda_\alpha(t_j|z_\delta(t_j)) + \qquad (11)$$
$$+ c_1(t-t_j)\left\{(t-t_j) + t_j(h+\frac{1}{n})\right\} \quad \text{при} \quad t\in[t_j,t_{j+1}).$$

Здесь c_1 – постоянная, которая может быть выписана явно.

Пусть закон формирования управления $U(t,z)$ имеет следующий вид:

$$U(t,z) = U_\alpha(t,z) = \arg\min\{2\langle S_*(\xi^h_T(\cdot))(\cdot)z - tb_{h,n}(\cdot), \qquad (12)$$
$$S_*(\xi_T(\cdot))(\cdot)u\rangle_{L_2} + \alpha\|u\|^2 : u\in Q\mathcal{F}_*\}.$$

Теорема 1. *Закон управления по принципу обратной связи* $U(t,z)$ (12) *обеспечивает выполнение неравенства* (11).

Доказательство. В начальный момент времени имеем

$$\Lambda_\alpha(0|z_\delta(0)) = 0. \qquad (13)$$

Таким образом, при $t=0$ неравенство (11) справедливо. Пусть это неравенство верно для всех $t\in[0,t_j]$. Возьмем произвольное число $s\in[t_j,t_{j+1}]$ и проверим (11) для $t=s$. Нетрудно видеть, что

$$\|z_\delta(t)\| \le tR, \quad t\ge 0.$$

Отсюда и из лемм 1, 2 выводим

$$\|s_j(x,z_\delta) - s^j(\xi,z_\delta)\|_{L_2} \le \|S_*(x_T(\cdot))(\cdot) - S_*(\xi^h_T(\cdot))\|_{\mathcal{L}_2}\|z_\delta(t_j)\| + \qquad (14)$$
$$+ t_j\|b(\cdot) - b_{h,n}(\cdot)\|_{L_2} \le t_j(d_1(h,1/n) + Rd_2(h,1/n)).$$

Здесь

$$s_j(x, z_\delta) = S_*(x_T(\cdot))(\cdot)z_\delta(t_j) - t_j b(\cdot) \in L_2(0, T; \mathbb{R}^q),$$
$$s^j(\xi, z_\delta) = S_*(\xi_T^h(\cdot))(\cdot)z_\delta(t_j) - t_j b_{h,n}(\cdot).$$

Учитывая правило определения функционала Λ_α (см. (10)), получаем

$$\Lambda_\alpha(s|z_\delta(s)) = \Lambda_\alpha(t_j|z_\delta(t_j)) + \mu_j + \nu_j + \alpha(\|v_j^\delta\|^2 - J^0)(s - t_j), \tag{15}$$

где

$$\mu_j = 2(s - t_j)\langle s_j(x, z_\delta), S_*(x_T(\cdot))(\cdot)v_j^\delta - b(\cdot)\rangle_{L_2},$$
$$\nu_j = \|S_*(x_T(\cdot))(\cdot)v_j^\delta - b(\cdot)\|_{L_2}^2 (s - t_j)^2.$$

Заметим, что

$$S_*(x_T(\cdot))(\cdot)u_0 - b(\cdot) = 0.$$

Отсюда и из (15) следует справедливость равенства

$$\Lambda_\alpha(s|z_\delta(s)) = \Lambda_\alpha(t_j|z_\delta(t_j)) + \nu_j + 2(s - t_j)\Big\{\Big[\langle s_j(x, z_\delta), S_*(x_T(\cdot))(\cdot)v_j^\delta - b(\cdot)\rangle_{L_2} +$$
$$+ \alpha\|v_j^\delta\|^2\Big] - \Big[\langle s_j(x, z_\delta), S_*(x_T(\cdot))(\cdot)u_0 - b(\cdot)\rangle_{L_2} + \alpha\|u_0\|^2\Big]\Big\}.$$

Далее имеем следующие оценки:

$$\|S_*(x_T(\cdot))(\cdot)v_j^\delta - b(\cdot)\|_{L_2} \le d_0 R + b_0, \tag{16}$$
$$\|s_j(x, z_\delta)\|_{L_2} \le (d_0 R + b_0)t_j,$$
$$d_0 = \|S_*(x_T(\cdot))(\cdot)\|_{\mathcal{L}_2}, \quad b_0 = \|b(\cdot)\|_{L_2}.$$

Следовательно, в силу (14), (16), верно неравенство

$$\Lambda_\alpha(s|z_\delta(s)) \le \Lambda_\alpha(t_j|z_\delta(t_j)) + \nu_j + \tag{17}$$
$$+ 2(s - t_j)\Big\{\Big[\langle s^j(\xi, z_\delta), S_*(x_T(\cdot))(\cdot)v_j^\delta - b(\cdot)\rangle_{L_2} + \alpha\|v_j^\delta\|^2\Big] -$$
$$- \Big[\langle s^j(\xi, z_\delta), S_*(x_T(\cdot))(\cdot)u_0 - b(\cdot)\rangle_{L_2} + \alpha\|u_0\|^2\Big]\Big\} + 4(s - t_j)t_j d_3(h, 1/n),$$
$$d_3(h, 1/n) = (d_1(h, 1/n) + R d_2(h, 1/n))(d_0 R + b_0).$$

Кроме того, из (16) (снова учитывая (14)) получаем

$$\|s^j(\xi, z_\delta)\|_{L_2} \le t_j d_4(h, 1/n), \tag{18}$$
$$d_4(h, 1/n) = b_0 + d_0 R + d_1(h, 1/n) + R d_2(h, 1/n).$$

Легко видеть, что

$$\nu_j \leq (s - t_j)^2 (b_0 + d_0 R)^2.$$

Еще раз воспользуемся леммами 1, 2. Тогда, учитывая (17), (18), устанавливаем оценку

$$\Lambda_\alpha(s|z_\delta(s)) \leq \Lambda_\alpha(t_j|z_\delta(t_j)) + 2(s - t_j)\Big\{ \Big[\langle s^j(\xi, z_\delta), S_*(\xi_T^h(\cdot))(\cdot) v_j^\delta\rangle_{L_2} + \tag{19}$$
$$+ \alpha\|v_j^\delta\|^2\Big] - \Big[\langle s^j(\xi, z_\delta), S_*(\xi_T(\cdot))(\cdot)u_0\rangle_{L_2} + \alpha\|u_0\|^2\Big]\Big\} +$$
$$+ 4(s - t_j)t_j d_5(h, 1/n) + (s - t_j)^2(b_0 + d_0 R)^2,$$

где

$$d_5(h, 1/n) = d_3(h, 1/n) + d_4(h, 1/n) d_2(h, 1/n) R \leq c_0\left(h + \frac{1}{n}\right);$$

c_0 – постоянная, которая может быть выписана явно. В силу правила определения отображения $U(t, z)$ (см. (12)), справедливо неравенство

$$s^j(\xi, z_\delta), S_*(\xi_T(\cdot))(\cdot) v_j^\delta\rangle_{L_2} + \alpha\|v_j^\delta\|^2\Big] - \tag{20}$$
$$- \Big[\langle s^j(\xi, z_\delta), S_*(\xi_T(\cdot))(\cdot)u_0\rangle_{L_2} + \alpha\|u_0\|^2\Big] \leq 0.$$

В таком случае из соотношений (19), (20) получаем при $s \in [t_j, t_{j+1})$

$$\Lambda_\alpha(s|z_\delta(s)) \leq \Lambda_\alpha(t_j|z_\delta(t_j)) + 4(s - t_j)t_j d_5(h, 1/n) + (s - t_j)^2(b_0 + d_0 R)^2.$$

Теорема доказана.

Пусть взяты последовательности положительных чисел $\{\alpha_n\}$, $\{h_n\}$ и $\{t_n\}$ со свойствами

$$\alpha_n \to 0, \quad h_n \to 0, \quad t_n \to +\infty, \tag{21}$$
$$(\alpha_n + \delta_n)/t_n \to 0, \quad \delta_n/\alpha_n \to 0, \quad t_n(h_n + 1/n)/\alpha_n \to 0 \ \text{ при } \ n \to \infty.$$

Тогда верна

Теорема 2. *При выполнении условия* (21) *имеет место сходимость*

$$z_{\delta_n}(t_n)/t_n \to u_0 \quad \textit{при} \quad n \to \infty. \tag{22}$$

Доказательство. Из (11) и (13) получаем оценку

$$\Lambda_{\alpha_n}(t_n|z_{\delta_n}(t_n)) \leq c_1\left(\delta_n t_n + t_n^2(h_n + 1/n)\right).$$

Таким образом, справедливы неравенства

$$\|S_*(x_T(\cdot))(\cdot)z_{\delta_n}(t_n) - t_n b(\cdot)\|^2_{L_2} \le c_1 \left(\delta_n t_n + t_n^2(h_n + 1/n)\right) + 2\alpha_n R^2 t_n, \quad (23)$$

$$\int_0^{t_n} \|\dot z_{\delta_n}(\nu)\|^2\, d\nu \le c_1 \left(\frac{\delta_n t_n}{\alpha_n} + t_n^2 \frac{h_n + 1/n}{\alpha_n}\right) + t_n J^0. \quad (24)$$

Поделив правую и левую части неравенства (23) на t_n^2, будем иметь

$$\|S_*(x_T(\cdot))(z_{\delta_n}(t_n)/t_n) - b(\cdot)\|^2_{L_2} \le c_2(\delta_n/t_n + h_n + 1/n) + 2\alpha_n R^2/t_n. \quad (25)$$

В силу выпуклости нормы, воспользовавшись неравенством Иенсена, будем иметь

$$\frac{1}{t}\int_0^t \|\dot z_{\delta_n}(\nu)\|^2\, d\nu \ge \left\|\frac{1}{t}\int_0^t \dot z_{\delta_n}(\nu)\, d\nu\right\|^2 = \|z_{\delta_n}(t)/t\|^2 \quad \text{для всех} \quad t > 0.$$

Отсюда и из (24) получаем

$$\|z_{\delta_n}(t_n)/t_n\|^2 \le c_1(\delta_n/\alpha_n + t_n(h_n + 1/n)/\alpha_n) + J^0. \quad (26)$$

Сходимость (22) следует из (25), (26). Заметим, что множество $Q\mathcal{F}_*$ выпукло, ограниченно и замкнуто. В таком случае верно включение

$$z_{\delta_n}(t_n)/t_n = \sum_{j=0}^{n-1} v_j^{\delta_n}\delta_n/t_n \in Q\mathcal{F}_*.$$

В силу ограниченности последовательности $\{z_{\delta_n}(t_n)/t_n\}_{n=1}^{\infty}$, не нарушая общности, считаем

$$z_{\delta_n}(t_n)/t_n \to u^* \in Q\mathcal{F}_* \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Учитывая (25), заключаем, что $u^* \in U_1$. Кроме того, в силу (26), имеем $\|u^*\| \le \|u_0\|$. Однако множество U_1 содержит единственный элемент минимальной нормы. Таким образом, $u^* = u_0$. Теорема доказана.

Из теоремы 2 следует

Теорема 3. *При выполнении условий* (21) *имеет место сходимость*

$$Q^{-1}z_{\delta_n}(t_n)/t_n \to (A_*, B_*) \quad \textit{при} \quad n \to \infty.$$

4. Заключение

В работе предложен алгоритм восстановления неизвестных матриц линейной системы с постоянным запаздыванием. Алгоритм устойчив к информационным помехам и погрешностям вычислений. Он ориентирован на компьютерную реализацию.

Литература

1. Кряжимский А. В., Осипов Ю. С. О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1983. №2. С. 29–41.

2. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1984.

3. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.

4. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1978.

5. Осипов Ю. С., Кряжимский А. В., Максимов В. И. Задачи динамической регуляризации для систем с распределенными параметрами: Препринт. Свердловск: ИММ УрО АН СССР, 1991.

6. Осипов Ю. С., Кряжимский А. В., Максимов В. И. Обратные задачи динамики для параболических систем // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, №5. С. 579–597.

7. Максимов В. И. Задачи динамического восстановления входов бесконечномерных систем. Екатеринбург: УрО РАН, 2000.

8. Кряжимский А. В., Осипов Ю. С. К регуляризации выпуклой экстремальной задачи с неточно заданными ограничениями. Приложение к задаче оптимального управления с фазовыми ограничениями // Некоторые методы позиционного и программного управления: Сб. науч. тр. Свердловск: УрО АН СССР, 1987. С. 34–54.

9. Kryazhimskii A. V. Convex optimization via feedbacks // SIAM J. Control Optimization. 1999. Vol. 37. P. 278–302.

10. Kryazhimskii A. V., Maksimov V. I., Osipov Yu. S. Reconstruction of boundary-sources through sensor observations // IIASA Working Paper. Laxenburg, Austria. WP-96-97. 1996.

Статья поступила 04.10.2002 г.
Окончательный вариант 22.11.2002 г.